物性物理学をどのようにして発展させるべきか :「レオロジーの幾何学的研究」を通しての一方法論の提案

池田, 恵

物性物理学をどのようにして発展させるべきか

—「レオロジーの幾何学的研究」を通しての一方法論の提案 —

東大工　池田　恵

（4月1日受理）

（懸賞応募論文）

§1　序

この論文の目的は，現状の物性物理学の方法論に対して，全く新しい一つの方法論を対立させ，物性物理学という概念を含めた問題を提起することである。物性物理学が，我々の観測しうる巨視的段階の状態を，原子・分子の微視的段階での規定条件から説明せんとしているが，扱う問題が局所化してしまって，大局的な状態へ還元することが困難になっているのではないか。物質の構造あるいは運動形態は，弁証法的論理からみても無限階層性であるが，どの段階での議論をしているかをはっきり認識していなければならない。そこに，すべての階層に共通な一つの統一的方法論が要求される。しかもその方法論が典型的に階層構造を持っていることが望ましい。現状の方法論が，果してこれらを本質的に満足しているか。このような発想に基づいて，筆者の興味に従い，レオロジーの分野からの問題提起を行ないたい。境界領域にわたる複雑な物性が多くなってきているわけだから，物性物理学の中だけでなく，他の物理学の分野にもまたがる統一的な方法論が打出されても良いはずである。

§2　「レオロジーの幾何学的研究」の本質

高分子物質をはじめ，力学的性質として，弾性・粘性・塑性等が複雑にからみあった特徴を示す物質が多く存在し，その力学的特徴を，“変形と流動”として把握しようとするのが，レオロジーという学問である。[1] その一般的な変形論を展開するに当っての方法論として，我々は「幾何学的方法論」を提案する。一口に幾何学的といっても，要するに連続体力学を扱うための微分幾何学的なものであり，その根底には，我々が観測できるものの共変性の仮定，即ち，ど

んな座標系からみても同型でなければならないという要請が存在する。着目している物体の変形を規定する基本量は，その物体を一つの空間に対応させて，変形がその空間構造の変化を来たすと考えると，その基本量はテンソルでなければならない。変形即ち座標変換という把握のもとに，変形状態の空間構造を，その空間のテンソル量の間の関係式で表現し，物理的意味付けを試みていくことになる。この方法論により，現象論的立場と分子論的立場の対立，巨視的と微視的の階層的対立は，微分の階数の差によって代表され，着目する階層を決めておけば，それを基準にした一つの階層構造が把握されることになる。

2.1　レオロジー的変形

レオロジーとは，変形と流動を扱う科学であるといわれるが，[1] レオロジー的変形の特徴は，弾性・粘性・塑性という三要素が複雑に組合さった結果であるといえる。我々は，これらの変形を，一般的変形論の立場から，応力ー歪あるいはその時間的変化関係に集約して考えていく。レオロジー的変形の典型的な例としての粘弾性は，緩和・遅延などで代表され，変形が時間に依存するということが本質的である。又，レオロジー的変形を代表するもう一つの例はゴム弾性であり，これは通常，微少変形という仮定の下で省略されてきた二次以上の微少量を少略してはならないことを意味する。しかし，より本質的なことは，変形が時間に依存するということに帰着され，これによって空間構造の特徴が規定される。レオロジーは，M. Reiner が指摘している様に，[1]「すべての実在の物質は，あらゆるレオロジー的性質を備えていると同時に，又，どのような単純な挙動も，いっそう複雑な挙動の退化したものと考えられる」という公理的な考え方に基づいて，境界領域にまたがる物質の変形と流動を扱うわけだから，常に本質にさかのぼった反省を行なって，しっかりした方針と方法論で研究しなければならない。

2.2　幾何学的方法論

レオロジー的変形の本質は，その時間依存性にあり，変形即ち座標変換だから，座標変換が時間に依存することになり，各線素が，

$$dx^{\kappa} = A_i^{\kappa}(x,t)\,dx^i \qquad (2\cdot1)$$

の如く変換される。但し，変形前の状態空間を（i）一空間，変形後の状態空間を（κ）一空間とし，A_i^{κ} を座標変換行列とする。又，（i＝1，2，3）（κ＝1，2，3）で各々の空間の座標系の指標であるとし，Einstein の総和規約を採用する。この（2.1）をレオノーム変換（rheonomic transformation）といい，この変換に基づいて構成される幾何学をレオノーム幾何学（rheonomic geometry）というから，レオロジー的変形はレオノーム幾何学によって記述されるといえる。物理学的には，レオノーム幾何学で構成されたテンソル量を観測するといえ，テンソル量を求めていかねばならないことになるが，詳細は専門論文[2)]にゆずって要点のみをのべる。このような四次元時一空間の取扱いは，一般相対性理論をはじめ種々論じられてきているところであり，我々の思想もそれらに関係してくることはいうまでもない。又，より一般的な空間として，フィルム空間（film − space）の考え方もあるが，[3)]これは後でふれることにする。

さて，まず，（2.1）であるが，実は，線素としては，

$$\delta x^{\kappa} \equiv dx^{\kappa} - x^{(1)\kappa}dt \ ; \quad x^{(1)\kappa} \equiv \frac{dx^{\kappa}}{dt} \qquad (2.2)$$

がベクトルであることが知られており，レオノーム変換でテンソル的変換をするものを，強テンソル（strong tensor）といい，強テンソルを現出させる系（κ）を標準系（normal coordinate）といっている。このことは，物理的現象の観測ということが我々の認識過程における一つの平均操作の結果であることに依存し，時間依存系では，強テンソルが観測にかかると考えられる。我々は，以下では，時間の尺度は（i）一空間でも（κ）一空間でも同じであると考えるが，空間によっては時間尺度が異なることが考えられるし，又，以下では本質的に一階の時間微分しか考慮に入れないが，より高階の時間微分をとり入れることも一般的には考えられるが，これらの方法論的拡張の問題は，一般化レオノーム幾何学（generalized rheonomic geometry）[2)]として考察されることを指摘しておく。

そこで，改めて（2.1）を

$$\delta x^{\kappa} = A_i^{\kappa}(x,t)\,\delta x^i \tag{2.3}$$

とかく，（i）一空間の計量テンソルを δ_{ji}（クロネッカー・デルタ）とし，（κ）一空間の計量テンソルを $g_{\lambda\kappa}$ とおくと，両者間には

$$g_{\lambda\kappa} = A_\lambda^j A_\kappa^i \delta_{ji} \tag{2·4}$$

なる関係がある。但し，

$$A_i^{\kappa} A_\lambda^i = \delta_\lambda^\kappa \;;\quad A_i^\kappa A_\kappa^j = \delta_i^j \tag{2.5}$$

が成立つものとする。今，変形即ち変換を，

$$A_i^\kappa(x,t) = \delta_i^\kappa + \beta_i^\kappa(x,t) \tag{2.6}$$

とおくと，（2.4）は，

$$\left.\begin{aligned} g_{\lambda\kappa} &= \delta_{\lambda\kappa} + 2\varepsilon_{(\lambda\kappa)} + \gamma_{\lambda\kappa} \\ &\delta_{\lambda\kappa} \equiv \delta_\lambda^j \delta_\kappa^i \delta_{ji}\,, \\ \text{但し}\quad &\varepsilon_{\lambda\kappa} \equiv \beta_\lambda^j \delta_\kappa^i \delta_{ji}\,, \\ &\gamma_{\lambda\kappa} \equiv \beta_\lambda^j \beta_\kappa^i \delta_{ji} \end{aligned}\right\} \tag{2.7}$$

とかける。$\varepsilon_{(\lambda\kappa)} \equiv \frac{1}{2}(\varepsilon_{\lambda\kappa} + \varepsilon_{\kappa\lambda})$ は通常の意味の歪テンソルであり，$\gamma_{\lambda\kappa}$ は二次の微少量として古典的線型変形論では省略されていたものである。今の場合は，β_i^κ 自身が大変形と考えられるから省略する正当性はないが，後で示されるように，非線型性にきいてくるのは，直接的には $\varepsilon_{\lambda\kappa}$ に由来する二次量である。物理的に問題となるのは A_i^κ 即ち β_i^κ の内容である。

一般に，空間の構造は，計量と接続で規定されるが，計量は既に決定されたから，次に，接続を決定しなければならない。接続というのは，各点のまわりの接触ユークリッド空間の関係を与えるもので，近傍点のまわりの状態を比較するものである。この概念の表現法として最適なのは，E. Cartan の動標構の方法[4]である。それは，各点で，その接触ユークリッド空間の標構を考え，隣接せる二点間で各々の標構がいかなる変化を来たしているかを論ずるもので

ある。その典型的な具体例は後にのべる高分子網目構造モデルである。幾何学的には，ベクトルの平行移動に関する共変微分の定義により接続係数が導入される。その共変微分は，任意のベクトル X^{κ} に対して，

$$DX^{\kappa} = dX^{\kappa} + \Gamma^{\kappa}_{\mu\lambda} X^{\lambda} \delta x^{\mu} + \Gamma^{\kappa}_{\lambda} X^{\lambda} dt \tag{2.8}$$

で定義され，$\Gamma^{\kappa}_{\mu\lambda}$ と $\Gamma^{\kappa}_{\lambda}$ は接続係数として，

$$\left.\begin{aligned} \Gamma^{\kappa}_{\mu\lambda} &= A^{\kappa}_{i} A^{k}_{\mu} A^{j}_{\lambda} \Gamma^{i}_{kj} + A^{\kappa}_{i} \partial_{\mu} A^{i}_{\lambda} \ ; \ \partial_{\mu} \equiv A^{\kappa}_{\mu} \frac{\partial}{\partial x^{k}} \\ \Gamma^{\kappa}_{\lambda} &= A^{\kappa}_{i} A^{j}_{\lambda} \Gamma^{i}_{j} + A^{\kappa}_{i} D_{t} A^{i}_{\lambda} \ ; \ D_{t} \equiv \partial_{t} + x^{(1)\mu} \partial_{\mu} \end{aligned}\right\} \tag{2.9}$$

なる変換をする。D_t は，いわゆる流体力学的時間微分であり，線素の扱い方から必然的に登場する。(2.9) により接続係数が決定されれば (2.4) の計量と相俟って空間構造が完全に決定されることになる。ところで (*i*) 一空間はユークリッド空間と同型とみなすから，(2.9) において，$\Gamma^{i}_{kj} = 0$，$\Gamma^{i}_{j} = 0$ と仮定できる。よって，この時，

$$\left.\begin{aligned} \Gamma^{\kappa}_{\mu\lambda} &= A^{\kappa}_{i} \partial_{\mu} A^{i}_{\lambda} \\ \Gamma^{\kappa}_{\lambda} &= A^{\kappa}_{i} D_{t} A^{i}_{\lambda} \end{aligned}\right\} \tag{2.10}$$

と決定されるが，このことは，後でのべるように，遠隔平行性空間を仮定していることになる。$\Gamma^{\kappa}_{\mu\lambda}$ は，変形の空間的変化を，$\Gamma^{\kappa}_{\lambda}$ は，変形の時間的変化を代表しているものである。(2.8) を

$$DX^{\kappa} = (\nabla_{\mu} X^{\kappa}) \delta x^{\mu} + (\nabla X^{\kappa}) dt \tag{2.11}$$

と表わすと，($\nabla_{\mu} X^{\kappa}$) や (∇X^{κ}) は共変微分商とよばれるもので，

$$\left.\begin{aligned} \nabla_{\mu} X^{\kappa} &= \partial_{\mu} X^{\kappa} + \Gamma^{\kappa}_{\mu\lambda} X^{\lambda} \\ \nabla X^{\kappa} &= D_{t} X^{\kappa} + \Gamma^{\kappa}_{\lambda} X^{\lambda} \end{aligned}\right\} \tag{2.12}$$

で定義され，これらはテンソルである。この共変微分商により，他のテンソル

量が次の如く定義される。

$$\left.\begin{aligned} 2[\nabla_\nu \nabla_\mu]X^\kappa &= R_{\nu\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\kappa} X^\lambda - 2S_{\nu\mu}^{\cdot\cdot\lambda} \nabla_\lambda X^\kappa \\ 2[\nabla \nabla_\mu]X^\kappa &\equiv P_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\kappa} X^\lambda - 2Q_\mu^{\cdot\lambda} \nabla_\lambda X^\kappa \end{aligned}\right\} \tag{2.13}$$

但し，$X_{[\lambda\mu]} \equiv \frac{1}{2}(X_{\lambda\mu} - X_{\mu\lambda})$ なる交代記号〔 〕を用いた。(2.13) の各テンソル量は次のようなものである。

$$R_{\nu\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\kappa} \equiv 2(\partial_{[\nu}\Gamma_{\mu]\lambda}^{\kappa} + \Gamma_{[\nu|\alpha|}^{\kappa}\Gamma_{\mu]\lambda}^{\alpha} + \Omega_{\nu\mu}^{\alpha}\Gamma_{\alpha\lambda}^{\kappa}) \tag{2.14}$$

は，リーマン・クリストッフェル曲率テンソルであり，

$$S_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\kappa} \equiv \Gamma_{[\mu\lambda]}^{\kappa} + \Omega_{\mu\lambda}^{\kappa} \tag{2.15}$$

は，捩率テンソルである。但し $\Omega_{\mu\lambda}^{\kappa}$ は非ホロノーム対象で，

$$\Omega_{\mu\lambda}^{\kappa} \equiv -A_i^\kappa \partial_{[\mu} A_{\lambda]}^i \tag{2.16}$$

と定義される。又，

$$P_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\kappa} \equiv D_t\Gamma_{\mu\lambda}^{\kappa} - \partial_\mu\Gamma_\lambda^\kappa + \Gamma_\alpha^\kappa\Gamma_{\mu\lambda}^\alpha - \Gamma_{\mu\alpha}^\kappa\Gamma_\lambda^\alpha + \Omega_\mu^\alpha\Gamma_{\alpha\lambda}^\kappa \tag{2.17}$$

は，形式的には $R_{\nu\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\kappa}$ の時間的変化を表わし，

$$Q_\lambda^{\cdot\kappa} \equiv \Gamma_\lambda^\kappa + \Omega_\lambda^\kappa \tag{2.18}$$

は，$S_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\kappa}$ の時間的変化を表わすことになるが，特に $Q_\lambda^{\cdot\kappa}$ は，変形の時間的変化のテンソル形である。但し，Ω_λ^κ は，時間的散逸性を代表し，

$$(D_t\partial_\lambda - \partial_\lambda D_t)X^\kappa \equiv -\Omega_\lambda^\mu\partial_\mu X^\kappa \tag{2.19}$$

で定義される。

以上が機械的に導入されたテンソル量であり，我々は，これらを変形論的に解釈していかねばならない。既に，接続係数として (2.10) を仮定したが，この間は，$R_{\nu\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\kappa} = 0$ かつ $P_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\kappa} = 0$ で曲率テンソルは消失し，遠隔平行性空間を与えることがわかる。一般に曲率テンソルは変形の不適合性を表わし，局

所的な接触ユークリッド空間よりもずっと大域的な領域にわたる特徴を表わすものである。又，(2.15)から，$S_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\kappa}=0$ がいえ，捩率テンソルも消失するが，その特徴は，非ホロノーム対象が代表することになる。この $\Omega_{\mu\lambda}^{\kappa}$ は，変形の非ホロノーム性，即ち塑性変形や内部自由度の変形等を表わし，系の空間的散逸性を表わす。例えば，高分子鎖の形態変化，からみあいの複雑さを一般的に把握するものである。この $\Omega_{\mu\lambda}^{\kappa}$ の出現と相補的な形で，大域的な特徴にまで発展する空間的散逸性も存在し，それが法線応力効果などである。$\Omega_{\lambda}^{\kappa}$ についても同様のことがいえる。

結局，(κ)一空間を規定する基本量としては，($g_{\lambda\kappa}$, $\Omega_{\mu\lambda}^{\kappa}$, $Q_{\lambda}^{\cdot\kappa}$)の三種であることがわかったが，これらを，(2.6)，(2.7)の形で計算すると，

$$\left.\begin{aligned} g_{\lambda\kappa} &= A_{\lambda}^{j}A_{\kappa}^{i}\delta_{ji} = \delta_{\lambda\kappa} + 2\epsilon_{(\lambda\kappa)} + r_{\lambda\kappa} \\ \Omega_{\mu\lambda}^{\kappa} &= -A_{i}^{\kappa}\partial_{[\mu}A_{\lambda]}^{i} = -\delta^{\kappa\alpha}\partial_{[\mu}\epsilon_{\lambda]\alpha} - \frac{1}{2}r^{\kappa\alpha}\partial_{[\mu}r_{\lambda]\alpha} \\ Q_{\lambda}^{\cdot\kappa} &= A_{i}^{\kappa}\partial_{t}A_{\lambda}^{i} = \delta^{\kappa\alpha}\partial_{t}\epsilon_{\lambda\alpha} + \frac{1}{2}r^{\kappa\alpha}\partial_{t}r_{\lambda\alpha} \end{aligned}\right\} \quad (2.20)$$

に帰着する。但し，この際，$Q_{\lambda}^{\cdot\kappa}$ の計算において，非ホロノーム対象 $\Omega_{\lambda}^{\kappa}$ を，定義より

$$\begin{aligned} &\Omega_{\lambda}^{\kappa} = \omega_{\lambda}^{\kappa} + 2x^{(1)\mu}\Omega_{\mu\lambda}^{\kappa} + \partial_{\lambda}x^{(1)\kappa} \\ &\text{但し，}(\partial_{t}\partial_{\lambda} - \partial_{\lambda}\partial_{t})X^{\kappa} = -\omega_{\lambda}^{\mu}(\partial_{\mu}X^{\kappa}) \end{aligned} \qquad (2.21)$$

とおき，

$$\omega_{\lambda}^{\kappa} + x^{(1)\mu}\Gamma_{\lambda\mu}^{\kappa} + \partial_{\lambda}x^{(1)\kappa} = 0 \qquad (2.22)$$

と仮定した。この条件は明らかに系(κ)の選び方に制限を加えるものであり，$x^{(1)\kappa}$ なる速度に対する，我々の観測の時間尺度の関係が必然的にこうなるという想定のもとでの仮定であり，厳密には，(κ)一空間における時間尺度の変換から由来するものといえ，一般化レオノーム幾何学の中に解消されてしまうといえる。統計力学的考察で，ミクロ・ブラウン運動の固有時間は，我々の観測の時間尺度よりもずっと短かいとして，本質的に不可逆過程である粘弾性を，

平衡統計力学で扱おうとする立場は，このことに関係している。

次には，(2.20)の量に，レオロジー的変形の特徴を代表させて，力学的考察により，応力－歪，歪速度関係を求めることが問題となる。ここで基本になるのは，エネルギー変分原理であり，蓄積エネルギーと散逸エネルギーの釣合った状態が実際に観測されると考える。エネルギー函数を，単位時間，単位体積当りWとおけば

$$W = W(g_{\lambda\kappa},\ \Omega^{\kappa}_{\mu\lambda},\ Q^{\cdot\kappa}_{\lambda}) \tag{2.23}$$

とかける。そして，$(g_{\lambda\kappa},\ \Omega^{\kappa}_{\mu\lambda},\ Q^{\cdot\kappa}_{\lambda})$ に抗する応力成分を $(\sigma^{\kappa\lambda},\ \mu_{\kappa}^{\cdot\lambda\mu},\ \tau_{\kappa}^{\cdot\lambda})$ とおくと，$\sigma^{\kappa\lambda}$ は通常の応力であり，$\mu_{\kappa}^{\cdot\lambda\mu}$ は，非ホロノーム変形に抗する応力で，いわばモーメント応力に相当しており，$\tau_{\kappa}^{\cdot\lambda}$ は，変形速度に抗する応力である。そこで，エネルギー変分原理を着目している領域v，時間間隔Iにわたって摘用すれば，

$$\delta\int_{v\times I} W d\underline{X}\, dt = \int_{v\times I}[\sigma^{\kappa\lambda}\delta g_{\lambda\kappa} + \mu_{\kappa}^{\cdot\lambda\mu}\delta\Omega^{\kappa}_{\mu\lambda} + \tau_{\kappa}^{\cdot\lambda}\delta Q^{\cdot\kappa}_{\lambda}]d\underline{X}\, dt = 0 \tag{2.24}$$

とかける。但し，$d\underline{X}$ は，体積要素である。(2.20)より各変形成分を変分し(2.24)に代入し，かつ境界条件が適当に満足されているとすると，場の方程式として，

$$\delta\varepsilon_{\lambda\kappa}\ :\ 2\sigma^{\kappa\lambda} + \partial_{\mu}M^{\kappa\lambda\mu} - \partial_{t}T^{\kappa\lambda} = 0 \tag{2.25}$$

$$\begin{aligned}\delta\gamma_{\lambda\kappa}\ :\ &\sigma^{\kappa\lambda} + \frac{1}{2}\partial_{\mu}\mathscr{M}^{\kappa\lambda\mu} - \frac{1}{2}\partial_{t}\mathscr{T}^{\kappa\lambda} + \\ &+ \frac{1}{2}\mathscr{M}^{\kappa\alpha\mu}\gamma^{\lambda\beta}\partial_{\mu}\gamma_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\mathscr{T}^{\kappa\alpha}\gamma^{\lambda\beta}\partial_{t}\gamma_{\alpha\beta} = 0\end{aligned} \tag{2.26}$$

を得る。但し，

$$\left.\begin{aligned} M^{\kappa\lambda\mu} &\equiv \mu_{\alpha}^{\cdot\lambda\mu}\delta^{\kappa\alpha}, & T^{\kappa\lambda} &\equiv \tau_{\alpha}^{\cdot\lambda}\delta^{\kappa\alpha} \\ \mathscr{M}^{\kappa\lambda\mu} &\equiv \mu_{\alpha}^{\cdot\lambda\mu}\gamma^{\kappa\alpha}, & \mathscr{T}^{\kappa\lambda} &\equiv \tau_{\alpha}^{\cdot\lambda}\gamma^{\kappa\alpha}\end{aligned}\right\} \tag{2,27}$$

とおいた。(2.25)は，通常の応力方程式であり，(2.26)と共に，一般的

なレオロジー方程式となっている。レオロジー的変形の時間依存性は，本質的には（2.25）で表わされており，二次現象の出現は（2.26）で規定されることになり，$\varepsilon_{\lambda\kappa}$ と $\gamma_{\lambda\kappa}$ の関係から両式は更に条件付けられるが，ここではこれ以上ふれない。

今までのべてきたところでは，計量と接続による空間構造の規定から，計量→捩率→曲率という微分操作に伴う階層構造及び，応力成分の側についての階層構造が存在し，それらが互いに相互作用を行い，場の方程式として現出されてくることを強調したい。

2.3 粘弾性論

今までは，幾何学的方法論の論理構造を示してきたわけで，この節では原理論的段階として粘弾性を論ずる。粘弾性は変形が時間に依存する散逸系として当然考えられるべき現象である。まず，（2.24）より，

$$\sigma^{\kappa\lambda} = \frac{\partial W}{\partial g_{\lambda\kappa}}\ ;\ \mu_{\kappa}^{\cdot\,\lambda\mu} = \frac{\partial W}{\partial \Omega_{\mu\lambda}^{\kappa}}\ ;\ \tau_{\kappa}^{\cdot\lambda} = \frac{\partial W}{\partial Q_{\lambda}^{\cdot\kappa}} \tag{2.28}$$

とおき，応力と変形成分を直接的に結びつける。我々は，今，Wの形としては

$$W = \frac{1}{2} A^{\kappa\lambda\mu\nu} g_{\nu\mu} g_{\lambda\kappa} + \frac{1}{2} B_{\nu}^{\cdot\,\sigma\rho\cdot\lambda\mu}{}_{\kappa}\, \Omega_{\mu\lambda}^{\kappa} \Omega_{\rho\sigma}^{\nu} + \frac{1}{2} C_{\sigma\cdot\lambda}^{\cdot\rho\cdot\kappa} Q_{\kappa}^{\cdot\lambda} Q_{\rho}^{\cdot\sigma} \tag{2.29}$$

を仮定していることになるが，実際は実験からWの形を決定しており，Mooney ら試みがある。[5),6)]（2.28）から，この時は，

$$\sigma^{\kappa\lambda} = A^{\kappa\lambda\mu\nu} g_{\nu\mu}\ ;\ \mu_{\kappa}^{\cdot\,\lambda\mu} = B_{\kappa}^{\cdot\lambda\mu\cdot\rho\sigma}{}_{\nu}\, \Omega_{\sigma\rho}^{\nu}\ ;\ \tau_{\kappa}^{\cdot\lambda} = C_{\kappa\rho}^{\cdot\lambda\cdot\sigma} Q_{\sigma}^{\cdot\rho} \tag{2.30}$$

となり，$A^{\cdots}$，$B^{\cdot\cdot}_{\cdot\cdot\cdot}$，$C^{\cdot\cdot}_{\cdot\cdot}$ は物質定数である。（2.30）は，いわゆる構造方程式（constitutive equations）である。粘弾性をはじめとするレオロジー的変形の特徴を議論する際，従来からは，あくまで $\sigma^{\kappa\lambda}$ なる応力と $g_{\lambda\kappa}$ なる歪の関係及びその時間的変化を考え，両者を結びつける物質定数の場所及び時間による変化を，余効函数やスペクトルを用いて論ずることが行なわれてきた。そこで我々も，（2.25）に着目し，物質定数の空間的・時間的

変化の様相を決定するという立場をとる。(2.25)に，(2.30)から得られる(2.27)を代入すると，簡単のために改めて物質定数をおきなおしてやって形式を整えると，

$$\begin{aligned}\sigma^{\kappa\lambda} &= B^{\kappa\lambda\mu\gamma\alpha\beta}(\partial_\mu\partial_\beta\varepsilon_{\alpha\gamma}) + C^{\kappa\lambda\gamma\alpha}(\partial_t^2\varepsilon_{\alpha\gamma}) \\ &\quad + B'^{\kappa\lambda\mu\cdot\alpha\beta}_{\quad\ \ \nu}(\partial_\mu\gamma^{\nu\gamma})(\partial_\beta\gamma_{\alpha\gamma}) + C'^{\kappa\lambda\cdot\beta}_{\quad\ \alpha}(\partial_t\gamma^{\alpha\gamma})(\partial_t\gamma_{\beta\gamma}) \\ &\quad + B''^{\kappa\lambda\mu\gamma\alpha\beta}(\partial_\mu\partial_\beta\gamma_{\alpha\gamma}) + C''^{\kappa\lambda\gamma\alpha}(\partial_t^2\gamma_{\alpha\gamma}) \qquad (2.31)\end{aligned}$$

とかける。一方，形式的に，

$$\sigma^{\kappa\lambda} = \underset{1}{E}^{\kappa\lambda\mu\nu}\varepsilon_{(\nu\mu)} + \underset{2}{E}^{\kappa\lambda\mu\nu}\gamma_{\nu\mu} \qquad (2.32)$$

とおいてやり，$\underset{1}{E}$，$\underset{2}{E}$ はそれぞれ $\varepsilon_{\lambda\kappa}$，$\gamma_{\lambda\kappa}$ に作用する微分作用素の役目を果す物質定数とすると，(2.32)と(2.31)との比較により，その形が決定されてくるが，このような $\underset{1}{E}$，$\underset{2}{E}$ を非弾性係数とよぶ。ところで，通常(2.32)に対しては，古くから Boltzmann の余効函数 (after−effect function) による表現が考えられ，線型粘弾性論の主流を占めている。[7] それによると，応力−歪関係式が，一般的に，

$$\left.\begin{aligned} & P_1\ \sigma^{\kappa\lambda} = P_2\ b\ g^{\kappa\lambda} + 2\,P_3\ b^{\kappa\lambda} \\ & \text{但し}\quad P_\alpha \equiv \sum_{i=0}^{m_\alpha} a_{\alpha i}\frac{\partial}{\partial t^i}\quad (a_{\alpha i}\ \text{は定数},\ m_\alpha\ \text{は正整数})\quad \alpha=1,2,3 \\ & g_{\lambda\kappa} = \delta_{\lambda\kappa} + 2\,b_{\lambda\kappa}\ :\quad b_{\lambda\kappa} \equiv \varepsilon_{(\lambda\kappa)} \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad\quad\ b \equiv b_{\lambda\kappa}g^{\kappa\lambda} \end{aligned}\right\} \qquad (2.33)$$

と表わされ，これから応力は

$$\sigma^{\kappa\lambda} = \bar{\lambda} * b\cdot g^{\kappa\lambda} + 2\,\bar{\mu} * b^{\kappa\lambda} \qquad (2.34)$$

と求まる。但し，＊の意味は

$$\left.\begin{aligned} \bar{\lambda} * \phi(t) &= \lambda\,\phi(t) + \int_0^\infty \ell(t-\tau)\,\phi(\tau)\,d\tau \\ \bar{\mu} * \psi(t) &= \mu\,\psi(t) + \int_0^\infty m(t-\tau)\,\psi(\tau)\,d\tau \end{aligned}\right\} \qquad (2.35)$$

であり，λ，μ は Lamé 定数である。$\ell(t)$ や $m(t)$ が余効函数であり，この“たたみ込み積分”の形から過去の履歴に依存するとか，記憶をもつとかいう表現がなされている。形式的には，(2.34) と (2.32) が類同であり，我々の形式は，余効函数形式を非線型化したものといえる。力学的モデルで一次元的に扱うと，Maxwell 及び Voigt モデルが代表として考えられているが，我々の場合でも，(2.32) から物質が等方性かつ均質であると仮定してやると，形式的に，

$$\left.\begin{aligned}\sigma^{\kappa\lambda} &= \underset{11}{E}\,\varepsilon\, g^{\kappa\lambda} + \underset{12}{E}\,\varepsilon^{(\kappa\lambda)} + \underset{21}{E}\,\gamma\, g^{\kappa\lambda} + \underset{22}{E}\,\gamma^{\kappa\lambda} \\ &\text{但し，}\ \varepsilon \equiv \varepsilon_{(\lambda\kappa)} g^{\kappa\lambda}, \quad \gamma \equiv \gamma_{\lambda\kappa} g^{\kappa\lambda}\end{aligned}\right\} \tag{2.36}$$

とかけるから，これを一次元的に，更に

$$\sigma = \overset{1}{E}\,\varepsilon + \overset{2}{E}\,\gamma \tag{2.37}$$

とかいてやると，(2.31)，(2.32) を介して，

$$\begin{aligned}\overset{1}{E} &\equiv B(\triangle) + C(\partial_t^{\,2}) \quad : \quad \triangle \equiv \frac{\partial}{\partial(x^1)^2} + \frac{\partial}{\partial(x^2)^2} + \frac{\partial}{\partial(x^3)^2}, \\ \overset{2}{E} &\equiv B''(\triangle) + C''(\partial_t^{\,2}) + C'(\partial_t)\end{aligned} \tag{2.38}$$

などと書き直す事ができるから，結局 (2.37) は，本質的には Voigt モデルを非線型化したものになっている。$\sigma^{\kappa\lambda} - g_{\lambda\kappa}$ に着目すれば，一般化 Voigt モデルになり，$\partial_t \tau_{\cdot\kappa}^{\cdot\lambda} - Q_{\cdot\lambda}^{\cdot\kappa}$ に着目すれば一般化 Maxwell モデルになる。これらの事は 2.1 節でのべた M. Reiner の公理的表現の具体例となる。

もう一つ，線型粘弾性論で問題となるのはスペクトルである。これは，(2.32) あるいは

$$\sigma^{\kappa\lambda}(t) = E^{\kappa\lambda\mu\nu}(t)\ \varepsilon_{(\nu\mu)}(t) \tag{2.39}$$

とかいた時，各種の緩和・遅延の機構が連続的に分布していると仮定して求められる，

$$E^{\kappa\lambda\mu\nu}(t) = \int_0^\infty G^{\kappa\lambda\mu\nu}(\tau)\, e^{-t/\tau}\, d\tau \tag{2.40}$$

なる固有時間 τ の分布函数 $G^{\kappa\lambda\mu\nu}(\tau)$ を介して

$$G^{\kappa\lambda\mu\nu}(\tau)\, d\tau = H^{\kappa\lambda\mu\nu}(\ell n\tau)\, d(\ell n\tau) \tag{2.41}$$

で定義される $H^{\kappa\lambda\mu\nu}(\ell n\,\tau)$ のことである。これは $E(t)$ から $G(\tau)$ への変換は一種の時間的平均化とみ，時間尺度の変換と考えることができるから，その変換後の空間での物質定数が $G(\tau)$ であり，変数変換後の物質定数が $H(\ell n\,\tau)$ であるといえる。

このように考えてくると，粘弾性的特徴を応力一歪関係で集約し，物質定数の場所及び時間依存性を論ずるのが従来の粘弾性論であり，変形成分として $(g_{\lambda\kappa},\ \Omega^{\kappa}_{\mu\lambda},\ Q^{\cdot\kappa}_{\lambda})$ が分離できていないところに複雑さが現出している。応力成分も $(\sigma^{\kappa\lambda},\ \mu_{\kappa}^{\cdot\lambda\mu},\ \tau_{\kappa}^{\cdot\lambda})$ の分離が不完全である。スペクトルにしても結局レオノーム幾何学での考察の範中に入るし，余効函数も特徴を明示的に表現するためのものであって，それのみを抽出した議論は，かえって"物理"を欠くことになろう。その良い例が文献 8）の議論である。

§3 高分子レオロジーについて

以上の議論を具体的な物質について摘用することが残されているが，筆者の興味が高分子物質にあるので高分子レオロジーについてのべたい。しかし，長くなるので，2.2 節でふれた網目構造モデルと法線応力効果としての Weissenberg 効果についてのみふれる。

まず，網目構造を，外部から与えた変形とは独立な変形を来たす内部構造をもつ一つのモデルとし，鎖状高分子がからまりあった結合点 (x^{κ}) に網目にそった局所標構即ち，動標構 $\{\mathbb{e}_{\kappa}\}$ を付随させる。隣接した 2 点間の標構のくいちがいは，線素 (dx^{κ}) と時間間隔 (dt) に比例するとして，

$$d\mathbb{e}_{\kappa} = \Gamma^{\lambda}_{\mu\kappa}\mathbb{e}_{\lambda}\, dx^{\mu} + \Gamma_{\kappa}^{\lambda}\mathbb{e}_{\lambda}\, dt \tag{3.1}$$

で与えられる。そうすれば 2.2 節にのべたレオノーム幾何学に移行できること

が，このことは，微視構造の洞察のためのモデルとして，各点に動標構を付随させ，接続を導入し，相対的変形の出現を非ホロノーム性に帰着させるという一般的な方針を打出すものである。このような内部構造をもつ物質に相当するモデルとしては，他にも種々の表現がなされており，"micro-structure",[9] 方向性物体,[10),11)] 非等方性流体,[12)] 内部角運動量,[13)] 内部回転[14)] などがある。今の場合では，鎖状高分子のからまり合いや，ミクロ・ブラウン運動，マクロ・ブラウン運動，いわゆる比例定理からのはずれ，結合点の生成・消滅などが内部構造の非ホロノーム変形に対応する。統計力学的考察でも，このような内部構造の変形に着目しようとする試みもあるが,[15)] それとてもこのことの認識が不充分で外部変形から一意的に内部変形を決定するために種々の仮定，即ち非ホロノームのホロノーム化を図っている。大体は，鎖の分布函数の時間的変化に着目して粘弾性を論じようとしているが,[16)] その方程式を，我々の計量についての条件式，$\nabla_\mu g_{\lambda\kappa}=0$ 及び $\nabla g_{\lambda\kappa}=0$，即ち

$$\left.\begin{aligned}\partial_\mu g_{\lambda\kappa} &= \Gamma^{\nu}_{\mu\lambda} g_{\nu\kappa} + \Gamma^{\nu}_{\mu\kappa} g_{\lambda\nu} \\ D_t g_{\lambda\kappa} &= \Gamma^{\nu}_{\lambda} g_{\nu\kappa} + \Gamma^{\nu}_{\kappa} g_{\lambda\nu}\end{aligned}\right\} \tag{3.2}$$

と比較すると正に同等であり，応力一歪関係式を（2.32）の如く仮定した上で，その時間的変化をみてみれば，（3.2）と相俟って，文献 15），16）と同様の議論ができることになる。それらに比してわかることは，全変形 A^{κ}_{i} の物理的内容を，例えば外部変形 $B^{\sigma'}_{i}$ とそれとは相対的な変形 $C^{\kappa}_{\sigma'}$ に分解し，（2.1）や（2.3）に対して，

$$A^{\kappa}_{i} = B^{\sigma'}_{i} C^{\kappa}_{\sigma'} \tag{3.3}$$

の如くおき，要は相対的変形 $C^{\kappa}_{\sigma'}$ を如何に $B^{\sigma'}_{i}$ と物理的に結びつけるかを考えていけばよいということである。それがテンソル形式になり，($g_{\lambda\kappa}$, $\Omega^{\kappa}_{\mu\lambda}$, $Q^{\cdot\kappa}_{\lambda}$) 及び ($\sigma^{\kappa\lambda}$, $\mu^{\cdot\lambda\mu}_{\kappa}$, $\tau^{\cdot\lambda}_{\kappa}$) を考慮に入れなければならないことを認識すれば，文献 15)，16) の取扱いもより明確になろう。

さて，次に，Weissenberg 効果についてのべよう。二次元平面円運動が三次元空間に曲りこんでくるから，曲率的性格の出現として把握できる。(2.10)

の接続係数からは（2.14）及び（2.17）の曲率テンソルは共に消失してしまうが，上記の曲率的性格というのは，$\Omega_{\mu\lambda}^{\kappa}$ 及び $\Omega_{\lambda}^{\kappa}$ なる粘弾性的特徴から派生し，より大域的な領域にわたると同時に時間的にも，我々の観測にかかる位のタイム・スケールの大きさをもつといえる。実際，$R_{\nu\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\kappa}=0$ から，

$$\left.\begin{aligned} &K_{\nu\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\kappa}=-2\nabla_{[\nu}U_{\mu]\lambda}^{\cdot\cdot\kappa}+2U_{[\nu|\alpha|}^{\cdot\cdot\kappa}U_{\mu]\lambda}^{\cdot\cdot\alpha} \\ &\text{但し}\quad K_{\nu\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\kappa}\equiv 2(\partial_{[\nu}\{{}^{\kappa}_{\mu]\lambda}\}+\{{}^{\kappa}_{[\nu|\alpha|}\}\{{}^{\alpha}_{\mu]\lambda}\}, \\ &\qquad\quad \{{}^{\kappa}_{\mu\lambda}\}\equiv\frac{1}{2}g^{\kappa\nu}(\partial_{\mu}g_{\lambda\nu}+\partial_{\lambda}g_{\nu\mu}-\partial_{\nu}g_{\mu\lambda}), \\ &\qquad\quad U_{\mu\lambda}^{\kappa}\equiv-\Omega_{\mu\lambda}^{\kappa}+g^{\kappa\nu}g_{\mu\delta}\Omega_{\lambda\nu}^{\delta}-g^{\kappa\nu}g_{\lambda\delta}\Omega_{\nu\mu}^{\delta} \end{aligned}\right\}\quad(3.4)$$

なる曲率が出現することになり，同様にして $P_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\kappa}=0$ より，

$$\left.\begin{aligned} &L_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\kappa}=-\nabla U_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\kappa}-Q_{\mu}^{\cdot\nu}U_{\nu\lambda}^{\cdot\cdot\kappa} \\ &\text{但し}\quad L_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\kappa}\equiv D_t\{{}^{\kappa}_{\mu\lambda}\}-\partial_{\mu}\Gamma_{\lambda}^{\kappa}+\Gamma_{\alpha}^{\kappa}\{{}^{\alpha}_{\mu\lambda}\}-\{{}^{\kappa}_{\mu\alpha}\}\Gamma_{\lambda}^{\alpha} \end{aligned}\right\}\quad(3.5)$$

が出現することとなり，我々の観測のタイム・スケールとこの効果の固有時間が合致した時に，その現象の時間的変化を表わすことになる。このような非線型現象の説明に対し，二次の変形の存在のために出現するという考え方がある。[17)] 我々の場合ならば，（2.7）に於て，変形 β_{i}^{κ} を一次とし，それを微分したものは二次であるとして，各量の次数を調べればよい。そうすると明らかに，$\Omega_{\mu\lambda}^{\kappa}$ と $Q_{\lambda}^{\cdot\kappa}$ は二次の量であり，ずっと高次の量は微少だとして考えないことにすれば，本質的にきいてくるのは $\varepsilon_{\lambda\kappa}$ に基づく二次の量である。このようにして文献 17）の主張を裏付けることもできる。

その他にも興味ある問題は多数あるが，動標構の方法に基づく非ホロノーム変形論が本質的なものであることを強調し，この節を終りたい。

§4　方法論的拡張について

ここでは，変形論の立場から変形の表現のための一般化としての方法論的拡張をのべる。

4.1 フィルム空間

レオノーム幾何学の拡張としてのフィルム空間[3)]についてのべよう。我々は，変換

$$\left.\begin{aligned} x^{\kappa} &= x^{\kappa}(x^{i}, t) \\ \tau &= \tau(t) \quad (\text{今の場合は } \tau = t) \end{aligned}\right\} \tag{4.1}$$

なる形で（i）一空間から（κ）一空間へのレオノーム変換を考えた。これを四次元時一空間を構成させるべく時間も独立な座標として扱うのを，フィルム空間という。この時は，座標変換としては，

$$\left.\begin{aligned} (A^{\Lambda}_{\mathrm{I}}) = \begin{pmatrix} A^{\kappa}_{i} & A^{\kappa}_{\phi} \\ A^{0}_{i} & A^{0}_{\phi} \end{pmatrix}; \quad & (\Lambda) = (\lambda, 0),\ x^{0} = \tau = t \\ & (\mathrm{I}) = (i, \phi),\ x^{\phi} = t \end{aligned}\right\} \tag{4.2}$$

なるものが使用され，フィルム空間の線素を $dx^{\mathrm{I}} = (dx^{i},\ dx^{\phi} = dt)$ とおくと，（4.2）により，

$$dx^{\Lambda} = A^{\Lambda}_{\mathrm{I}}\, dx^{\mathrm{I}} \tag{4.3}$$

と変換されるが，これを分解すると，

$$\left.\begin{aligned} dx^{\kappa} &= A^{\kappa}_{i}\, dx^{i} + A^{\kappa}_{\phi}\, dt \\ dx^{0} &= A^{0}_{i}\, dx^{i} + A^{0}_{\phi}\, dt = dt \end{aligned}\right\} \tag{4.4}$$

とかけるから，反変成分の $dx^{0} = dt$ はスカラーだが dx^{κ} はベクトルではないことがわかる。それで，2.2 節でのべた如く強テンソルの導入が考えられたわけである。計量テンソルについても，（2.4）と同様にして，

$$g_{\Lambda k} = A^{\mathrm{J}}_{\Lambda}\, A^{\mathrm{I}}_{k}\, \delta_{\mathrm{JI}} \tag{4.5}$$

と導入されるとすると，これを分解してわかることは，時間と空間の混合成分が登場してくることに特徴があり，空間成分の時間的変化として物理的意味付けを行なっていかねばならないことである。次に，（Λ）一空間の共変微分を

$$\overset{*}{D}V^{\Lambda} = dV^{\Lambda} + \overset{*}{\Gamma}{}^{\Lambda}_{\Phi\Psi} V^{\Psi} dx^{\Phi} \tag{4.6}$$

で定義すると，この接続係数と（2.8）のものとの関係が問題になる。

i) V^0 をスカラーとする。この時，

$$(\overset{*}{D}V^{\Lambda})_{\Lambda=0} \equiv \dot{D}V^0 \tag{4.7}$$

が成立つと仮定する。計算の結果は，

$$\overset{*}{\Gamma}{}^{0}_{0\psi} = 0, \quad \overset{*}{\Gamma}{}^{0}_{\omega\psi} = 0, \quad \overset{*}{\Gamma}{}^{0}_{\omega 0} = 0, \quad \overset{*}{\Gamma}{}^{0}_{00} = 0 \tag{4.8}$$

である。

ii) $(V^{\psi} - x^{(1)\psi} V^0)$ はベクトル故，

$$(\overset{*}{D}V^{\Lambda})_{\Lambda=\psi} - x^{(1)\psi} (\overset{*}{D}V^{\Lambda})_{\Lambda=0} \equiv D(V^{\psi} - x^{(1)\psi} V^0) + V^0 \delta x^{(1)\psi} \tag{4.9}$$
$$\text{但し} \quad \delta x^{(1)\kappa} \equiv \nabla(\delta x^{\kappa})$$

が成立つと仮定する。結果は，

$$\left.\begin{aligned} \overset{*}{\Gamma}{}^{\psi}_{\omega\chi} &= \Gamma^{\psi}_{\omega\chi}, \\ \overset{*}{\Gamma}{}^{\psi}_{0\omega} &= \Gamma^{\psi}_{\omega} - \Gamma^{\psi}_{\chi\omega} x^{(1)\chi}, \\ \overset{*}{\Gamma}{}^{\psi}_{00} &= -\{x^{(2)\psi} - \Gamma^{\psi}_{\chi\omega} x^{(1)\omega} x^{(1)\chi} + 2\Gamma^{\psi}_{\omega} x^{(1)\omega}\} \end{aligned}\right\} \tag{4.10}$$

となる。（4.10）の最後の式は，通常力学系の運動方程式として採用されているもので，$\Gamma^{\psi}_{\chi\omega}$ や Γ^{ψ}_{ω} は抵抗係数の役目を果し，$\overset{*}{\Gamma}{}^{\psi}_{00}$ は作用力と考えられる。我々が3節でのべた考え方を高分子孤立鎖の各要素について摘用すると，そこでは各要素の運動方程式が問題となり，相対速度，流体力学的相互作用なども考慮されているが，（4.10）の最後の式は，各要素の運動方程式ともなるはずである。

さて，（4.2）なる変換に基づく非ホロノーム対象も，（2.16）と同様に，

$$\overset{*}{\Omega}{}^{K}_{MA} \equiv - A^{K}_{I}\,\partial_{[M} A^{I}_{A]} \qquad (4.11)$$

と定義され，分解してやれば，(2.16) 及び (2.19) に帰着させ得るが，(2.22) の条件は，結局，$\overset{*}{\Omega}{}^{\kappa}_{0\lambda} = -\overset{*}{\Omega}{}^{\kappa}_{\lambda 0}$ を $\Omega^{\kappa}_{\lambda}$ と同等視するということに他ならず，系 (κ) のとり方を規定するものである。

このような時一空間の考え方に基づいて考察され得る問題は，変形の時間的変化のみならず，力学系の乱調問題，ヒステリシス，転位の運動などの諸問題があると考えられる。

4.2 非対称計量空間

今まで我々は，E. Cartan の動標構の方法により，各点自身が特徴的な自由度をもち，変形に際して，非ホロノーム性を現出させることが本質的であると考えてきた。動標構の方法とは意識されないで同じような考え方をしているものも他にあり，例えば，各点に directors をつけ加えたり，[10] 一般相対性理論では，vierbein 形式を用いたりしている。[18] これらすべてに共通なことは，点自身の内部構造を想定していることで，ついでにいうならば，素粒子論の非局所場の理論 — 素粒域の概念[19] — に通ずるところなきにしもあらずで，その内部構造の階層性を，更に微視的に洞察していくことが，素粒子物理学への移行といえないこともない。もちろん，そのような本質的要素の抽出のみから一つの分野に入りこんでいくためには，幾何学的方法論の縮退化を常に考えていかねばならないし，物理的構造の対応を明確にしていかねばならないことはいうまでもない。

さて，このような変形に対する応力というものは，一般的には非対称であって然るべきであろう。それが対称になってしまっているのは，計量即ち歪が対称だからである。2.2節の立場では，応力を非対称にすべき自由度は，接続係数の段階にくみこまれて，モーメント応力を非対称にしている。しかし，変形 A^{κ}_{i} そのものにまでさかのぼれば，それに抗する応力は非対称になる。現在の変形論では，Cosserat 連続体の力学として，このようにモーメント応力 — Couple－stress とよんでいる — を考えて応力の非対称化を図ることが盛んに行なわれている。[10), 20)] 我々としても自然な形でこのことが導き出せるよう

に方法論を拡張する必要があろう。そのために，計量の段階で非対称性をとり入れることを考える。この考え方は，実は A. Einstein が一般相対性理論に於て，対称場である重力場と反対称場である電磁場を統一しようとして提出した，非対称場の相対論にも関係する。[21)] 我々の場合，距離変化の概念のみから導入される計量は対称だから，それを非対称に拡張するためには，ある種の物理的場が作用し，その効果とし二点に内部構造が生じるという状態を考えなければならない。特徴的にいえば，純物理的自由度のはる場と純幾何学的自由度のはる場の相互作用場を構成することを考えなければならない。その統一的方法論が非対称計量空間である。我々は変形を A_i^{κ} なる座標変換とみなし，A_i^{κ} の中に種々の物理的条件をとり入れていくが，上述の如く，性格の異なる自由度の対立・統合を強調する立場では，それを明示的に表現していくことが望ましい。例えば純幾何学的自由度の場の標構を $\{\mathfrak{C}_{\kappa}\}$，純物理的自由度の場の標構を $\{\mathfrak{C}_{\sigma}\}$ とおくと，

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{C}_{\kappa} &= B_{\kappa}^{i}\mathfrak{C}_{i} \\ \mathfrak{C}_{\sigma} &= C_{\sigma}^{j}\mathfrak{C}_{j} \end{aligned}\right\} \tag{4.12}$$

なる，それぞれの“変換”が規定され，物理的には

$$C_{j}^{\sigma} = \triangle_{\kappa}^{\sigma}\, B_{j}^{\kappa} \tag{4.13}$$

などの関係が想定され，相互作用場の非対称計量が

$$g_{\kappa\sigma} = B_{\kappa}^{j}\, C_{\sigma}^{i}\, \delta_{ji} = \triangle_{\sigma}^{\lambda}(B_{\lambda}^{j} B_{\kappa}^{i}\, \delta_{ji}) \tag{4.14}$$

の如く導入されてくる。接続にしても各々の自由度に対して，共変微分が，

$$\left.\begin{aligned} \underset{1}{D}\mathfrak{C}_{\kappa} &= d\mathfrak{C}_{\kappa} - \Gamma_{\mu\kappa}^{\lambda}\mathfrak{C}_{\lambda}\, dx^{\mu} \\ \underset{2}{D}\mathfrak{C}_{\sigma} &= d\mathfrak{C}_{\sigma} - \Gamma_{\mu\sigma}^{\rho}\mathfrak{C}_{\rho}\, dx^{\mu} \end{aligned}\right\} \tag{4.15}$$

などと導入され，空間構造を規定していく。但し，我々は，幾何学的場即ち変形場を母空間と考えているから，線素については距離の自由度をもつもののみに着目している。(4.12) をみてわかることは，$(\{\mathfrak{C}_{\kappa}\}, \{\mathfrak{C}_{\sigma}\})$ という二

つの部分空間の統合空間が存在し，それから（4.12）の変換によって部分空間への分解が逆に行なわれると考えることもできる。そう考えると，いわゆる接触テンソル解析的な非ホロノーム部分空間への分解論[22]に相当していることになり，最も一般的には，その理論を使えばよいことになる。文献22）によると，ある特殊な条件のもとでは，フィンスラー空間（Finsler space）[22),23)]を与えることが示されているが，この空間は，各点でelement of supportを独立変数として採用し，いわば各点の方向特性をとり入れた形になっているから，それが本質的な場合には，物理的にも有効であろう[24),25)]。

以上，物理的条件の本質的要素を抽出していけばかくの如く方法論が拡張されることをのべた。具体的な問題を扱うのは，筆者自身のこれからの課題である。

§5 結　　語

今までのべてきたことは，幾何学的方法論に基づいて，微分の階数による階層性をふまえた上で，微視的洞察を具体的に示してき，そして，内部構造をもつ物質の変形論として，動標構の方法を一つの統一的立場として主張してきたことに集約される。筆者が，レオロジーという一つの分野に対して自分なりの体系をうちたて，統一的観点からながめるということを強調せざるを得なかったのは，筆者自身が自分の研究の方向を定めんと模索している最中だからであるが，そのような，何をどのようにとらえるか，そのよりどころとなるべき統一的立場は何か，といった問題が，物性物理学全般にわたっても，より大きなレベルで存在しているのではないかと感じたのは，ひとり筆者のみの〝ひがみ〟にすぎぬのであろうか。一つの方法論がうちだされるについては，もちろん，その者にとっての自然構造の認識の仕方が大きく作用し，それを反映した形でうちだされるわけだが，この論文では，その認識過程がのべられたといってよい。その方法論の有効性を信ずると共に，その限界をはっきりとした形で明言することができなければならないが，「物性研究」の読者の方々の御批判をあおぎ，更に一層確実なものにしたいと思っている次第である。

（1969年3月）

文　献

§6 参考文献

1) M. Reiner, Deformation, Strain and Flow — An Elementary Introduction to Rheology. H. S. Lewis & Co. Ltd., London, (1960).

2) T. Suguri, J. Math. Soc. Japan, **4**, 231 (1952).

3) J. A. Schouten, Tensor Analysis for Physicists. Oxford, Clarendom Press, (1951).

4) E. Cartan, Leçon sur la géometrie des espaces de Riemann. Gauthier—Villars, Paris (1928).

5) M. Mooney, J. Appl. Phys., **11**, 582 (1940).

6) R. S. Rivlin, Rheology 1 (ed. Eirich), 351 (1956).

7) 小野木重治，レオロジー要論，槇書店 (1957).

8) B. D. Coleman, Arch. Rational Mech. Anal., **17**, 1 (1964).

9) R. D. Mindlin, Arch. Rational Mech. Anal., **16**, 51 (1963).

10) J. L. Ericksen & C. Truesdell, Arch. Rational Mech. Anal., **1**, 295 (1958).

11) M. Born & K. Huang, Dynamical Theory of Crystal Lattices. Oxford (1954).

12) J. L. Ericksen, Arch. Rational Mech. Anal., **4**, 231 (1960).

13) J. S. Dahler & L. E. Scriven, Proc. Roy. Soc. London, **A275**, 504 (1963).

14) E. V. Kuvshinskii & E. L. Aero, Soviet Phys. — Solid State, **5**, 1892 (1964).

15) S. Hayashi, J. Phys. Soc. Japan, **18**, 131 (1963).

16) M. Yamamoto, J. Phys. Soc. Japan, **11**, 413 (1956).

17) R. S. Rivlin, Nature, **160**, 611 (1947).

18) D.W. Sciama, Recent Developments in General Relativity. Pergamon Press (1962) の中, pp. 415 ~ 439.

19) 湯川秀樹, 片山素久, 福留秀雄, 素粒子, 岩波書店 (1961).

20) R.A. Toupin, Arch. Rational Mech. Anal., **17**, 85 (1964).

21) A. Einstein, The Meaning of Relativity. Princeton Univ. Press. (1955).

22) K. Yano & E.T. Davies, Annali di Matematica, **37**, 1 (1954).

23) E. Cartan, Les Espaces de Finsler. Hermann, Paris (1934).

24) J.L. Horváth und A. Moór, Zeit. Phys., **131**; 544 (1950)

25) J.L. Horváth, Phy. Rev., **80**, 901 (1950).